## BAB I

**MATRIKS**

1. **Definisi Matriks**

Matriks di definisikan sebagai susunan berbentuk persegi panjang dari elemen-elemen yang di atur berdasarkan baris dan kolom.

1. **Notasi, Elemen Dan Ordo Matriks**

Matriks di notasikan dengan huruf capital (A, B, C, dll)

Elemen (entri) matriks berupa huruf, maka di tulis dengan huruf kecil. Secara umum, sebuah matriks dengan baris dan kolom disajikan berikut :

Ordo matriks adalah ukuran suatu matriks, yang ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom.

1. **Jenis-Jenis Matriks**
   1. Matriks baris, yaitu matriks yang hanya terdiri dari satu baris.

A =

* 1. Matriks kolom, yaitu matriks matriks yang hanyaterdiri dari satu kolom.

B =

* 1. Matriks persegi, yaitu matriks dengan banyak baris sama dengan banyaknya kolom.

C =

* 1. Matriks nol, di notasikan O, matriks yang semua elemennya adalah nol.

O =

* 1. Matriks identitas (satuan) di notasikan I, yaitu matriks persegi yang elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainnya nol.

I =

1. **Transpose Dan Kesamaan Suatu Matriks**
   * 1. **Kesamaan Dua Matriks**

Dua matriks dikatakan sama jika ordo kedua matriks sama dan elemen-elemennya yang seletak (bersesuaian) sama.

* + 1. **Transpose Matriks**

Transpose suatu matriks adalah matriks baru yang diperoleh dengan mengubah susunan kolom suatu matriks menjadi baris dan baris menjadi kolom. Transpose matriks ***A* =** dengan ordo ditulis dan ordonya menjadi .

1. **Operasi-Operasi Aljabar Pada Matriks**
2. **Penjumlahan Dan Pengurangan**

* Penjumlahan dan pengurangan dua matriks dapat dilakukan jika matriks tersebut mempunyai ordo yang sama.
* Hasil penjumlahan dan pengurangan dua matriks atau lebih adalah dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian).
* Sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks:
* Sifat assosiatif :
* Sifat komutatif :
* Penjumlahan matriks dengan matriks nol menghasilkan matriks itu sendiri :

**Contoh :**

1. Diketahui

. Tentukan hasil dari :

* + - 1. P + Q

Jawab:

* + - 1. S + T

Jawab : .

* + - 1. Q – R

Jawab: = = =

1. Diketahui .

Tentukan A + ( B + C ) dan ( A + B ) + C. Apakah hasil keduanya sama ?

Jawab : karena sifat Sifat assosiatif : maka jawabanya sama

A + ( B + C ) =

B+C= ==

. A + ( B + C ) =+ = =.

(A + B) + C)=

A+B = =

(A+B)+C = .=.=.

1. **Perkalian Skalar Dengan Matriks**

Misalkan suatu skalar dan *A* sebuah matriks, maka adalah sebuah matriks yang didapat dengan cara mengalikan setiap elemen matriks *A* dengan skalar

**Contoh :**

* + - * 1. Diketahui

Tentukan hasil dari :

1. 2A

Jawab : 2 = =

1. 3B + 2C

Jawab 3B = 3 =

2C = 2

3B + 2C= + =

* + - * 1. Diketahui . Tentukan nilai A – 2B !

Jawab : - 2 ==

=

1. **Perkalian Matriks dengan Matriks**

Dua matriks dapat dikalikan apabila banyaknya kolom pada matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua.

Perhatikan syarat kedua matriks dapat dikalikan. Hasil kali dua matriks A dengan ordo m x n dan matriks B dengan ordo n x p, adalah sebuah matriks C = AB yang berordo m x p.

Pada perkalian matriks berlaku sifat-sifat :

* Assosiatif :
* Distributif terhadap penjumlahan,
* Perkalian matriks dengan matriks identitas menghasilkan matriks itu sendiri,

**Contoh :**

1. Tentukan hasil perkalian matriks :
2. =
3. 2x3 3x1 = 2x1 =( ) =) =
4. Diketahui

Tentukan *AB* dan *BA* ! Apakah *AB = BA* ?

AB====

BA===

*Jadi : AB ≠ BA*

1. Jika .

Maka A(B – C)=….

B-C = =

A(B–C)=

=

1. Diketahui matriks .

Nilai dari AB – C =..…

AB=

AB – C =-=

**SOAL LATIHAN :**

1. Diketahui

. Tentukan :

1. P + Q
2. Q + R – P
3. S – T
4. 2R – + 3P
5. Diketahui matriks A = , B = dan C = . Nilai dari AB – C adalah….
6. Diketahui matriks ….
7. Diketahui matriks . Hasil dari matriks A x B adalah….

**DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS**

**Matriks Ordo 2 x 2**

* + - 1. **Determinan Matriks Ordo 2 x 2**

Matriks yang memiliki nilai determinan hanyalah matriks persegi. Nilai seterminan suatu matriks ordo

2 x 2 adalah hasil kali elemen – elemen diagonal utama dukurangi hasil kali elemen pada diagonal kedua.

Misalkan diketahui matriks A berordo 2 x 2, ,

Maka determinan A adalah :

Determinan matriks A dapat ditulis det A atau .

**Contoh :**

1. Tentukan determinan matriks !

Jawab :

det A = = -6.3 – (-2) 5 = -18 +10 =8

1. Jika diketahui tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut !

Jawab : => x.3 –(6-x).x =10 => 3x-6x+x2 = 10 => -3x+x2=10

* -3x+x2-10 =0 => (-5+x)(2+x) =0 => x1= -5+x =0 => **x=5** x2= 2+x=0 => **x=-2**
* Jadi nilai x =(5,2}
  + - 1. **Invers Matriks Ordo 2 X 2**

Misalkan adalah matriks dengan ordo 2 x 2 maka matriks A mempunyai invers jika determinan dengan . Invers dari matriks A dapat dinyatakan dengan :

atau

Jika diketahui sebuah matriks P yang memiliki invers P-1 sehingga PP-1 = I, maka tidak ada matriks lain, misalnya Q yang memenuhi PQ = I. dengan kata lain, invers suatu matriks adalah tunggal. Selain itu, sifat berikut berlaku pada invers matriks.

**=**

**-34 +35 = 1**

**Contoh :**

1. Tentukan invers dari matriks berikut :

Jawab: **=**

Jawab:  **= =**

**=**

1. Diketahui . Tunjukan bahwa kedua matriks tersebut adalah matriks yang saling invers !

Jawab : = . => ==-1-1

=

1. Diketahui matriks . Tentukan :
2. . ( Buktikan bahwa )

Jawab : = =

= =

Buktikan bahwa

*=*

*==*

*=*

*= ==*

*=*

1. Diketahui matriks invers matriks *A* adalah . . . .

Jawab : A-1 = == =

1. Invers matriks

Jawab : A-1 = =-1=

**SOAL LATIHAN :**

* + - 1. Tentukan invers dari matriks – matriks berikut :
      2. Invers matriks adalah ….
      3. Matriks A = , invers matriks A adalah ………

**Matriks Ordo 3 x 3**

1. **Determinan Matriks Ordo 3 x 3**

Ada beberapa cara untuk menghitung nilai determinan matriks persegi 3 x 3 yang akan kita pelajari adalah menggunakan metode *Sarrus*.

Misalkan . Dengan aturan Sarrus, determinan A adalah sebagai berikut :

**– – – + + +**

=

=

**Contoh :** Tentukan determinan dari matriks berikut :

***Pengertian Minor, Kofaktor dan Adjoin***

Jika , maka minor dari matriks A dinyatakan oleh minor atau , didefinisikan sebagai determinan sub matriks setelah baris ke-I dan kolom ke-j pada matriks A dihilangkan.

Minor dari matriks A di atas antara lain sebagai berikut :

* Baris ke-1 dan kolom ke-1 dihilangkan.

sehingga di peroleh

Jadi minor

* Baris ke-1 kolom ke-2 dihilangkan.

sehingga di peroleh

Jadi minor

* Baris ke-1 kolom ke-3 dihilangkan.

sehingga di peroleh

Jadi minor

* Baris ke-2 kolom ke-1 dihilangkan.

sehingga di peroleh

Jadi minor

* Baris ke-2 kolom ke-2 dihilangkan.

sehingga di peroleh

Jadi minor

* Dan seterusnya.

Jika minor menyatakan minor ke-ij dari matriks A, maka kofaktor ke-ij dari matriks A, dinyatakan dengan , didefinisikan sebagai berikut.

Matriks yang elemen – elemennya merupakan kofaktor dari suatu matriks disebut matriks kofaktor. Sedangkan transpose dari matriks kofaktor disebut ***adjoin*** dari matriks A dan dinyatakan dengan Adj (A).

**\*Dicatat di modul atau buku catatan Matematika :**

Diketahui matriks

=(1.2.3)+(4.-1.-3)+(0.5.6)- (0.-2.-3) – (1.-1.6)-(0.5.3)= 6+12+0-0+6+0 =24

Tentukan :

1. Minor

minor =-6+6 =12

minor

minor = 30 – 6 = 24

minor

minor

minor

minor

minor

minor

1. Kofaktor

C11 = C12 = - , C13 =

C21 = - C22 = , C23 =-

C31 = C32 = - , C33 =

1. Adjoin
2. Invers Matriks Ordo 3 x 3

=  **.** ==

TUGAS 5

Ditulis di kertas menjadi 1 halaman di upload ke web belajaran

Tentukan invers dari matriks

TENTUKAN:

1. Minor
2. Kofaktor
3. Adjoin
4. Invers (

**BAB II**

**VEKTOR DI R – 2 ( BIDANG DATAR )**

1. **Pengertian Vektor**

Vektor adalah besaran yang memiliki besar ( panjang dan nilai) dan arah. Contohnya : perpindahan, kecepatan, gaya, medan magnet, medan listrik dan sebagainya. Sedangkan panjang, massa, suhu, luas, volume, dan sebagainya merupakan besaran skalar. Besaran skalar yaitu besaran yang hanya memiliki besar dan tidak memiliki arah.

Secara geometris vektor diwakilkan oleh sebuah ruas garis berarah dngan panjang ruas menunjukkan besar, sedangkan arahnya menunjukkan arah vektor itu.

Vektor dinyatakan dengan huruf kecil yang dicetak tebal, misalnya atau diberi tandapanah diatas misalnya . Jika menyatakan ruas garis berarah dari A ke B maka dapat ditulis . Panjang (besar) dilambangkan dengan .

*B*

Perhatikan gambar :

dibaca “vektor *u*”

dibaca “ vektor *AB*”

= panajang

*A*

Vektor diwakili oleh garis berarah . Titik *A* disebut titik pangkal (titik asal) dan titik *B* disebut titik ujung vektor

* **Vektor Secara Geometris**

Perhatikan gambar berikut :

B

A

Vektor di R-2

Vektor di R-3

* **Kesamaan Dua Vektor**

Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut memiliki besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar :

*B*

*B*

*A*

*A*

Vektor sama dengan vektor . sedangkan vektor tidak sama dengan vektor karena mempunyai arah yang berbeda.

* **Penjumlahan dan Pengurangan Vektor**

1. Penjumlahan vektor

Hasil penjumlahan vektor merupakan *resultan vektor*. Misalnya, jumlah dari vektor dan vektor adalah vektor . Maka vektor disebut resultan vektor dari vektor dan vektor .

Penjumlahan vektor secara geometris dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu :

* **Metode Segitiga**

Jika terdapat dua vektor, yaitu dan , maka penjumlahan (resultan) dari dan adalah vektor vektor atau vektor . Dengan metode segitiga vektor didapat dengan cara menghubungkan titik pangkal vektor dengan titik ujung vektor .

* **Metode Jajargenjang**

Dengan metode jajargenjang jumlah vektor dan ditentukan dengan memindahkan vektor (tanpa mengubah arah dan besarnya), sehingga titik pangkal vektor berimpit dengan titik pangkal vektor .

1. Pengurangan Vektor

Mengurangkan vektor sama dengan menjumlahkan vektor dengan lawannya. Misalnya vektor , dapat ditulis .

* **Perkalian Vektor dengan Bilangan Real**

Misalkan adalah sebuah vektor, maka vektor adalah suatu vektor yang panjangnya 2 kali panjang vektor dengan arah vektor yang sama dengan vektor . Sedangkan vektor adalah vektor yang panjangnya 4 kali panjang vektor dengan arah yang berlawanan dengan vektor .

Secara umum perkalian vektor dengan bilangan real *n* berlaku :

* Untuk maka vektor searah vektor dengan .
* Untuk maka vektor brlawanan arah vektor dengan .

Contoh Soal

1. Tentukan resultan dari vektor – vektor di bawah ini :
2. b)

Jawab:

+ +

1. Tentukan resultan vektor di bawah ini :

Jawab :

1. Secara geometri, tentukan pengurangan vektor berikut :
2. b)

Jawab :

1. Vektor – vektor digambarkan sebagai berikut :

Gambarkan diagram vektor yang menunjukkan :

a.

1. b.

1. **VEKTOR DI R – 2 ( BIDANG DATAR )**
2. Vektor Posisi

Dalam koordinat Cartesius, suatu vektor tertentu dikenali dari perubahannya ke arah horizontal (searah sumbu X) dan ke arah vertikal (searah sumbu Y).

Vektor posisi adalah vektor yang berpangkal di titik *O*. Vektor posisi titik dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan berurutan, yaitu :

* Vektor baris
* Vektor kolom

*Y*

B

A

*X*

0

Dari gambar, dan

Maka, diperoleh

1. Vektor Satuan ( bentuk Kombinasi Linear )

Sebuah vektor dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linear. Misalkan dan adalah vektor – vektor dengan panjang satu satuan, masing – masing terletak pada sumbu X dan sumbu Y positif.

Setiap vektor yang terletak pada bidang Cartesius selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor dan vektor .

disebut kombinasi linear dari vektor satuan dan .

Jika m adalah skalar, maka berlaku ;

atau

**Contoh Soal**

1. Misalkan . Jika vektor wakil dari ruas garis berarah dan vektor wakil dari ruas garis berarah . Nyatakan vektor dan dalam vektor klom !
2. Diketahui vektor – vektor . Nyatakan vektor dalam bentuk kombinasi linear !
3. Diketahui titik . Nyatakan vektor dalam bentuk komponen linear serta hitunglah dalam bentuk komponen dan kombinasi linear vektor satuan !
4. **Aljabar Vektor di R – 2**
5. Kesamaan vektor

Dua vektor dikatakan sama secara aljabar jika komponen – komponen yang bersesuaian sama.

Misalkan :

dan

Vektor dan dikatakan sama jika,

dan

1. Penjumlahan vektor

Jika vektor disajikan dalam bentuk komponen (dalam koordinat Cartesius), penjumlahan dapat dilakukan dengan menjumlahkan komponen – komponennya.

Misalnya ;

Pada penjumlahan vektor berlaku :

* Komutatif :
* Asosiatif :
* Unsur identitas adalah vektor nol
* Jika , invers dari vektor adalah vektor negatif

1. Pengurangan vektor

Pengurangan vektor yang dinyatakan dalam bentuk vektor kolom dapat dilakukan dengan mengurangkan komponen – komponennya.

Misal.

Maka,

1. Perkalian vektor dengan bilangan real

Jika *m* adalah bilangan real dan

Maka,

**BAB II**

**VEKTOR DI R – 2 ( BIDANG DATAR )**

Di catat di modul atau buku catatan matematika :

Contoh Soal

1. Diketahui . Hitunglah :
2. = =
3. = +==
4. = ==
5. Diketahui . Tentukan :
6. = 3=
7. = =
8. = 22 +=
9. Diketahui titik . Titik *R* adalah sebuah titik pada garis *PQ* sehingga . Tentukan :
10. Vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah , = =
11. Vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah , = = =
12. Koordinat titik *R*.
13. **Besar vektor di R – 2**

Misalkan dan adalah dua titik yang terletak pada bidang Cartesius. Maka; vektor dan vektor

Dari komponen – komponen vektor dapat ditentukan panjang atau besar vektor dengan rumus :

1. **Perkalian Skalar dari Dua Vektor**

Hasil kali skalar dari dua vektor tidak nol dan dinyatakan oleh ( dibaca )

Jika dan

Maka,

Misalkan, vektor membentuk sudut , maka perkalian skalar dua vektor didefinisikan :

Penurunan rumus

1. **Ortogonalitas**

Ortogonalitas merupakan hal yang penting pada perkalian skalar dua vektor. Jika hasil perkalian skalar dua vektor yang bukan nol, maka dapat dikatakan bahwa kedua vektor tersebut saling tegak lurus (ortogonal).

Contoh Soal

1. Dua titik Diketahui pada bidang Cartesius membentuk sebuah vektor vektor *AB*. Tentukan :
2. Vektor tersebut dalam bentuk komponen.
3. Besar (panjang) vektor tersebut.
4. Diketahui vektor-vektor . Hitunglah :
5. c)
6. d)
7. Diketahui dan vektor membentuk sudut 600. Tentukanlah perkalian skalar !
8. Jika , tentukanlah sudut yang dibentuk oleh vektor !
9. Buktikan bahwa vektor saling orthogonal !
10. Diketahui vektor . Jika kedua vektor tersebut saling tegak lurus, tentukan nilai *x* !

**Soal Latihan**

1. Diketahui vektor hitunglah panjang atau besar vektor berikut:
2. d)
3. e) 2
4. f)
5. Diketahui vektor-vektor . Tentukan :
6. d)
7. e)
8. f)
9. Tentukan hasil perkalian scalar dari vektor-vektor berikut, jika diketahui sudut yang terbentuk dari kedua vektor adalah 300.
10. c)
11. d)
12. Diketahui setiap pasang vektor berikut saling tegak lurus. Hitunglah nilai *m* :

**VEKTOR DI R – 3 ( BIDANG RUANG )**

1. **Sistem Koordinat Di R-3**

Pada sistem koordinat di R-3, kita akan mengenal tiga sumbu, yaitu sumbu *X*, sumbu *Y* dan sumbu *Z.* Ketiga sumbu tersebut membentuk tiga bidang, yaitu bidang *XY*, bidang *XZ* dan bidang *YZ*. Tiap titik A dalam ruang berdimensi tiga berkoresponsensi dengan 3 bilangan terurut (*x,y,z*) yang disebut koordinat ruang

Z

Z

1

Y

0

Y

A (2,-3,1)

-3

0

X

2

Sumbu koordinat di R-3

X

Letak titik A di R-3

1. ***Vektor Posisi Di R-3***

Z

P

Q

Y

0

X

Ruas garis berarah yang mewakili vektor dengan titik sebagai titik pangkal dan koordinat titik sebagai titik ujung.

Berdasarkan aturan secara geometri, didapat :

Karena mewakili vektor dan mewakili vektor

Maka,

1. ***Vektor Dalam Kombinasi Linear***

Vektor di R-3 dinyatakan dalam kombinasi linear terdiri dari 3 vektor satuan. Vektor – vektor masing –masing terletak pada sumbu *X* positif, sumbu *Y* positif dan sumbu *Z* positif.

Jika titik O sebagai titik pangkal dan titik A sebagai titk ujung dengan koordinat (*x,y,z*) maka sebagai wakil vektor dapat dinyatakan sebagai :

Vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

1. Vektor baris
2. Vektor kolom

Dengan *x,y,z* disebut komponen-komponen vektor .

1. ***Operasi Aljabar Vektor di R-3***

Misalkan , dan *n* bilanagn real, operasi aljabar vektor berlaku :

1. Kesamaan vektor

Jika , maka komponen yang bersesuaian sama.

1. Penjumlahan vektor

Penjumlahan vektor dapat dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponennya.

* Unsur identitas adalah vektor nol
* Unsur invers dari vektor adalah vektor

1. Pengurangan vektor

Pengurangan vektor dilakukan dengan mengurangkan komponen-komponen yang bersesuaian.

1. Perkalian vektor dengan bilangan real.

Bila *n* adalah bilangan real, maka

**Contoh Soal**

1. Diketahui vektor-vektor .
2. Nyatakan dalam bentuk kombinasi linear vektor satuan.
3. Tentukan nilai dari vektor-vektor berikut :
4. Diketahui titik . titik*P* adalah titik pada garis hubung . Tentukan :
5. Vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah
6. Koordinat titik *P*.
7. **VEKTOR DI R – 3**
8. ***Besar (Panjang) Vektor di R-3***

Vektor di R-3 dapat ditentukan besar atau panjangnya.

Diketahui maka panjang yaitu :

Jika diketahui dua titik yaitu di dalam ruang, panjang dirumuskan :

1. ***Perkalian Skalar Dua Vektor***

Misalkan vektor dinyatakan dalam vektor kolom

Hasil kali skalar dua vektor yaitu ;

Apabila kedua vektor membentuk sebuah sudut tertentu, maka perkalian skalar dua vektor yaitu ;

dengan adalah sudut antara .

1. ***Sifat – Sifat Perkalian Skalar Dua Vektor di R-3***

Misalkan vektor adalah vektor di R-3. Pada operasi perkalian skalar dua vektor berlaku sifat-sifat berikut.

1. Bersifat komutatif
2. Bersifat distributif

**Contoh Soal**

1. Diketahui koordinat titik-titik tentukan panjang vektor berikut!
2. Tentukan hasil perkalian skalar dari vektor
3. Jika , hitunglah sudut antara .
4. Misalkan vektor membentuk sudut 300. Jika hitunglah nilai :

**Soal Latihan**

1. Diketahui vektor . Tentukan :
2. Diketahui titik-titik dan berada di *R-3*.

Tentukan nilai !

1. Misalkan vektor , dan vektor .
2. Nyatakan vektor dalam bentuk vektor kolom.
3. Hitunglah panjang vektor
4. Diketahui vektor . Tentukan :
5. besar sudut yang terbentuk antara vektor
6. Hitunglah nilai : ( SOAL – SOAL UN )
7. Diketahui vektor . Jika tentukan nilai *m* !
8. Diketahui vektor . Jika tentukan nilai *m* !

**BAB III**

**PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT**

* + - * 1. **PERSAMAAN KUADRAT**
* **Definisi Persamaan kuadrat**.

Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan dimana pangkat tertinggi dari variabelnya yaitu dua.

Bentuk umum persamaan linier satu variabel :

dengan

* **Menentukan akar-akar persamaan kuadrat**

1. **Faktorisasi**

Langkah-langkah menyelesaikan persamaan kuadrat

* Cari dua bilangan yang memenuhi syarat sebagai berikut :

1. Hasil kalinya sama dengan
2. Jumlahnya adalah sama dengan

Misalkan dua bilangan itu adalah x1 dan x2 maka :

atau

* Jika kita akan mengubah/memfaktorkan bentuk baku persamaan kuadrat :
* Untuk, Faktorkan, menjadi :

=> atau

* Untuk, Faktorkan, menjadi :

=> atau

1. **Melengkapkan kuadrat sempurna**

Persamaan kuadrat, diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna dengan cara sebagai berikut :

* Pastikan Koefisien dari adalah 1, bila belum bernilai 1 bagilah dengan bilangan sedemikian hingga koefisiennya adalah 1.
* Tambahkan ruas kiri dan kanan dengan setengah koefisien dari kemudian kuadratkan.
* Buatlah ruas kiri menjadi bentuk kuadrat sempurna, sedangkan ruas kanan disederhanakan.

1. **Rumus**

Jika dan adalah akar-akar persamaan kuadrat, maka :

dan

* **Jenis Jenis Akar Persamaan Kuadrat**

Jika diperhatikan car mencari penyelesaian persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus, maka jenis akar-akar tersebut akan bergantung pada nilai *b2 – 4ac*disebut **diskriminan,** yaitu, *D = b2 – 4ac*.

Beberapa jenis akar persamaan kuadrat berdasarkan nilai *D* :

1. Jika *D > 0*, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang berbeda.
2. Jika *D = 0,* maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang sama atau sering disebut mempunyai akar kembar (sama).
3. Jika *D < 0,* maka persamaan kuadrat mempunyai akar yang tidak real (imajiner).

* **Rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat :**

Dari akar –akar persamaan kuadrat *x1*dan *x2* :

* Jika kedua akar tersebut dijumlahkan, maka didapatkan ;
* Jika kedua akar tersebut dikalikan, maka didapatkan ;
* **Menyusun persamaan kuadrat yang diketahui akar-akarnya**

Jika akar-akar persamaan kuadrat diketahui, ada dua cara yang dapat digunakan untuk menyusun persamaan kuadrat yaitu :

* Menggunakan rumus perkalian faktor dan menyelesaikan persamaan kuadrat dengan faktorisasi. Jika danadalah akar persamaan kuadrat, maka persamaannya:
* Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar. Jika danadalah akar-akar persamaan kuadrat, maka persamaannya:
* **Menyusun persamaan kuadrat berdasarkan akar-akar persamaan kuadrat lain.**

Suatu persamaan kuadrat yang akar-akarnya mempunyai hubungan dengan akar-akar persamaan kuadrat lainnya dapat disusun dengan cara menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.

***Contoh Soal ;***

1. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya :
2. 0 dan 4
3. – 2 dan 2
4. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya tiga lebihnya dari akar-akar persamaan kuadrat *x2 – 3x – 28 = 0* !
5. Jika *p* dan *q* adalah akar-akar persamaan kuadrat *x2 – 3x + 4 = 0*, tentukanlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya *(2p + 1)* dan *(2q + 1)* !

**SOAL LATIHAN :**

1. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya :
2. 0 dan 2
3. – 2 dan 7
4. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua lebihnya dari akar-akar persamaan kuadrat *x2 – 5x – 14 = 0* !
5. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan kuadrat x2+ 2x – 8 = 0, tentukanlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya (2p + 2) dan (2q + 2) !
   * + - 1. **FUNGSI KUADRAT**
6. **Pengertian Fungsi Kuadrat**

* Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi dalam himpunan bilangan yang dinyatakan dengan rumus fungsi:

***y =f(x) = +bx+c*** dengan  *a, b, c R dan a ≠0.*

* Untuk menggambar grafik fungsi kuadrat, lambang*f(x)* dapat diganti dengan *y, dimana x* disebut variabel bebas dan *y* disebut variabel terikat.
* Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola simetris.

1. **Sifat-Sifat Grafik Fungsi Kuadrat**
   * 1. Berdasarkan nilai  *a.*

* Jika *a> 0* (positif), maka grafik terbuka keatas.

Fungsi memiliki nilai ekstrim minimum ( ) atau titik balik minimum.

* Jika *a< 0* (negatif), maka grafik terbuka kebawah.

Fungsi kuadrat memiliki nilai ekstrim maksimum ( atau titik balik maksimum.

* + 1. Berdasarkan nilai diskriminan (D)

Nilai diskriminan suatu persamaan kuadrat adalah:

**D = - 4*ac***

Secara geometri , nilai diskriminan berkorespondensi dengan titik potong grafik dengan sumbu *x* , yaitu:

* Jika D > 0 maka grafik memotong sumbu *x* didua titik yang berbeda.
* Jika D = 0 maka grafik menyinggung sumbu *x*( *x*,0 ) disebuah titik.
* Jika D < 0 maka grafik tidak memotong dan tidak menyinggung sumbu *x.*

1. **Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat**

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi kuadrat:

* Menentukan titik potong dengan sumbu *x*,

Diperoleh jika *y* = 0 atau *a + bx + c = 0.*

* Menetukan titik potong dengan sumbu *y*,

Diperoleh jika *x* = 0,yaitu dengan mensubtitusikan *x = 0* kedalam persamaan fungsi kuadrat.

* Menentukan:

1. Sumbu simetri : ***x =***
2. Koordinat titik balik/ puncak :

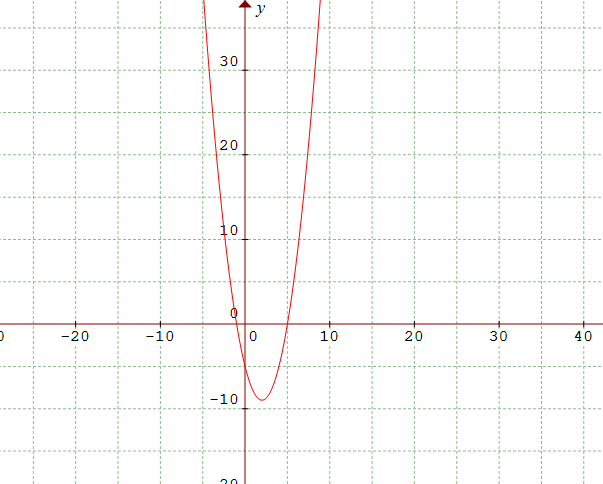
* Menentukan beberapa titik bantu lainnya ( jika diperlukan).

Ambil sembarang *x*R kemudian subtitusikan ke persamaan fungsi kuadrat. Hubungkan titik –titik tersebut untuk mendapatkan grafik fungsi kuadrat.

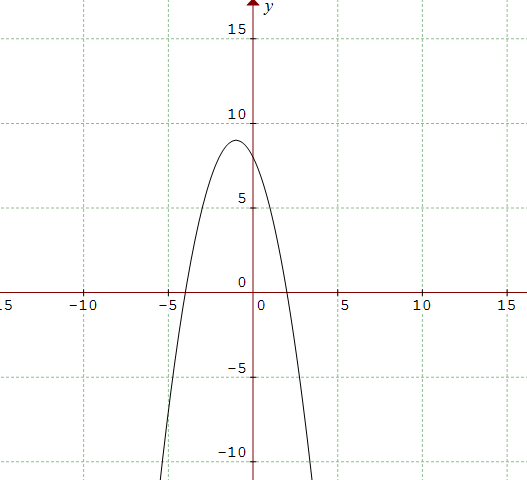
**Contoh soal :**

Gambarkan grafik fungsi kuadrat dengan persamaan berikut :

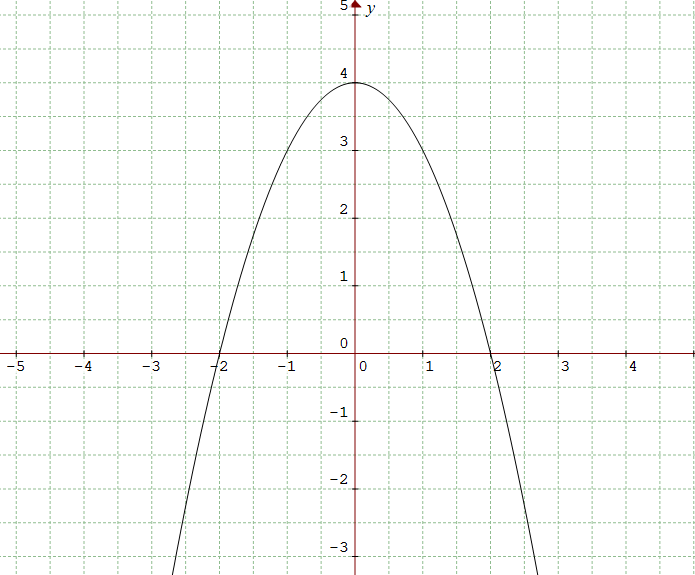
1. *y = x*2*– 4x – 5 = 0*



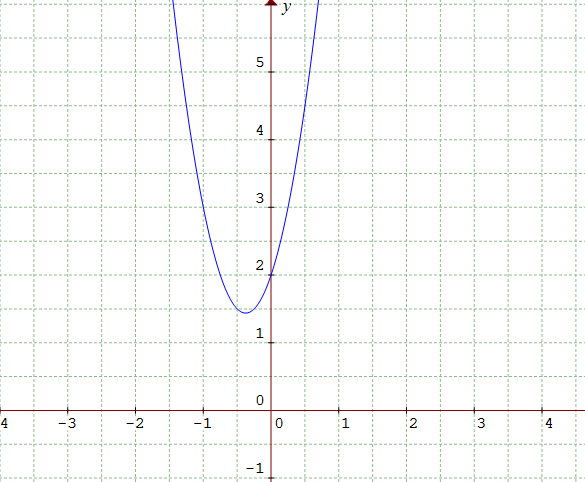
1. *y = − x2 + 2x + 8 = 0*



1. *4 – x 2 = 0*



1. *4x 2 +3x = − 2*



**Soal Latihan :**

Gambarkan grafik fungsi kuadrat dengan persamaan berikut :

1. *y = x*2*– 4x – 5 = 0*
2. *y = − x2 + 2x + 8 = 0*
3. *4 – x 2 = 0*
4. *4x 2 +3x = − 2*
5. **Menentukan Persamaan Fungsi Kuadrat Jika Diketahui Grafik atau Unsur – Unsurnya.**

* Persamaan fungsi kuadrat *f(x) = ,*apabila diketahui grafik fungsi melalui tiga titik. Misalkan fungsi kuadrat melalui tiga titik sembarang, yaitu ( ,) , ( ,) dan

( ,), maka untuk menentukan persamaan fungsi kuadrat , titik-titik tersebut disubtitusikan kedalam fungsi kuadrat

***f(x) = =***

Sehingga diperoleh sistem persamaan linier tiga variebel (*a, b* dan *c).*

* Fungsi kuadrat *f(x) = ,* apabila diketahui dua titik potong terhadap sumbu X dan satu titik yang lainnya. Dalam kasus ini digunakan rumus:

**)**

* Fungsi kuadrat *f(x) = ,* jika diketahui titik puncak grafik (). Dalam hal ini digunakan rumus:

* Fungsi kuadrat menyinggung sumbu X dan melalui sebuah titik. Dalam kasus ini digunakan rumus:

**Contoh soal :**

1. Tentukan fungsi kuadrat yang melalui titk (1, − 4), (0, − 3) dan (4, 5) !
2. Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang memotong sumbu X di titik A (1, 0),B (− 3, 0) dan memotong sumbu Y di titik (0, 3) !
3. Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang titik puncaknya ( − 1, 9) dan melalui titik (3, − 7)!

**Disalin di buku atau modul :**

1. Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang melalu titik (1, − 15), (0, − 8) dan ( − 1, 5) !

Jawab:

**Persamaaan : *= …0***

Titik (1,-15) : -15=a.1^2+b.1+c => -15=a+b+c ….1

Titik(0,-3) : -3=a.0^2+b.0+c => -3=c …..2

Titik (4,5) ; 5=a.4^2+b.4+c =>5=16a+4b+c …..3

....1 -15=a+b+(-3) =>a=3-b

….3 5=16(3-b)+4b+(-3) =>5=48-16b+5b-3 =>11b=48-5-3 =>b=40/11

….1 -15=a+40/11+(-3) =>a=-15-40/11+3 => a=-12-40/11=92/11

….0 y=92/11x^2+40/11x-3

1. Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang titik puncaknya (1, − 2) dan melalui titik (3, 0) dan gambarkan grafik fungsinya !

Y=a(x-xp)2 +yp

0=a(3-1)2+(-2) => 4a-2 => a=1/2

Y=1/2 (x-1)2-2 => ½(x2-2x+1)-2 =>1/2x2 – x-1

**Tugas** **dikerja sebagai sebajai tugas 3 :**

Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang memotong sumbu *X* di titik *A* (6, 0),*B* (− 3, 0) dan di titik (1, 5) !

**BAB IV**

**KOMPOSISI DAN INVERS FUNGSI**

1. **Relasi dan Fungsi**

Relasi adalah suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan ke himpunan lain. ***Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi atau pemetaan jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A berpasangan dengan tepat satu anggota himpunan B.*** Suatu fungsi atau pemetaan dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan terurut, rumus, diagram panah, atau diagram cartesius. Fungsi *f* yang memetakan himpunan A ke himpunan B ditulis dengan notasi ***ƒ : A → B***, dengan :

A disebut domain (daerah asal) dinotasikan ***Dƒ***

B disebut Kodomain (daerah kawan) dinotasikan  ***Kƒ***

*y € B │(x, y) € R, x € A* disebut range (daerah hasil), dinotasikan dengan ***Rƒ***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Contoh 1 | Contoh 2 | Contoh 3 |
| relasi dan fungsi | bukan fungsi | pengertian fungsi |
| Bukan fungsi karena terdapat anggota di A yang tidak dihubungkan dengan anggota di B | Bukan fungsi karena terdapat anggota di A yang dihubungkan lebih dari satu dengan anggota di B | Merupakan fungsi karena setiap anggota di A tepat dihubungkan dengan satu anggota di B |

1. **Sifat-sifat Fungsi**
   1. Fungsi surjektif

Pada fungsi  ***ƒ: A → B***, jika setiap elemen di B mempunyai pasangan di A atau ***Rƒ*** = ***B***, atau setiap *y € B*  terdapat *x € A*  sedemikian sehingga *f(x) = y*. Contoh : lihat gambar p

* 1. Fungsi Into

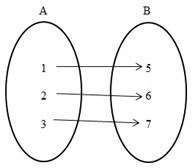
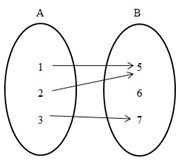
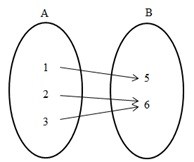
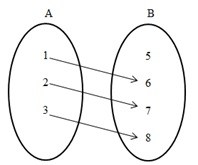
Pada fungsi ƒ: A → B , jika terdapat elemen di B yang tidak mempunyai pasangan di A. Contoh: lihat gambar q

* 1. Fungsi Injektif

Pada fungsi  ƒ: A → B , jika setiap elemen di B mempunyai pasangan tepat satu elemen dari A. Contoh : lihat gambar r

* 1. Fungsi Bijektif

Jika fungsi ƒ: A → B  merupakan fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif. Contoh : lihat gambar s



s

r

p

q

1. **Fungsi Komposisi**

Fungsi komposisi merupakan susunan dari beberapa fungsi yang terhubung dan bekerja sama. Dari dua jenis fungsi f(x) dan g(x) kita dapat membentuk sebuah fungsi baru dengan menggunakan sistem operasi komposisi. operasi komposisi biasa dilambangkan dengan ” **◦**” (komposisi/bundaran). fungsi baru yang dapat kita bentuk dari f(x) dan g(x) adalah :

***(f ◦ g)(x)*** artinya g dimasukkan ke f. ***(f ◦ g)(x) = f (g (x)→ komposisi g (fungsi f bundaran g atau fungsi komposisi dengan g dikerjakan terlebih dahulu daripada f)***

***(*g *◦*f*)(*x*)*** artinya f dimasukkan ke g. ***(*g *◦*f*)(*x*)=*g*(*f*(*x*)→ komposisi f (fungsi g bundaran f atau fungsi komposisi dengan f dikerjakan terlebih dahulu daripada g)***

* + - 1. **Nilai Fungsi Komposisi**

Menentukan nilai komposisi untuk sembarang nilai dapat dilakukan dengan menentukan terlebih dahulu aturan fungsi komposisinya atau dapat juga dengan langsung menghitungnya secara bertahap.

**Contoh Soal**

Diketahui *f(x)*= 3x – 4 dan *g(x)* = 2x, maka tentukanlah rumus *(f ◦ g)(2)*  dan  *(g ◦ f)(-2)*  …

Jawab:

*(f ◦ g)(x)* = *g* dimasukkan ke f menggantikan x

*(f ◦ g)(x)* = 3(2x)-4

*(f ◦ g)(x)* = 6x – 4

*(f ◦ g)(2)*  = 6.2 – 4 = 12 – 4 = 8

*(g ◦ f)(x)*  = f dimasukkan ke g menggantikan x

*(g ◦ f)(x)* = 2(3x-4)

*(g ◦ f)(x)*= 6x-8

*(g ◦ f)(-2)* = 6 (-2) – 8 = (-12) – 8 = -20

**Tugas 4**

Diketahui *f(x)*= 5x – 2 dan *g(x)* = -3x,

*Tentukan:*

1. *(f ◦ g)(x)*
2. *(g ◦ g)(x)*
3. *(f ◦ f)(x)*
4. *(g ◦ f)(x)*
5. *(f ◦ g)(2)* 
   * + 1. **Sifat-Sifat Fungsi Komposisi**

Fungsi komposisi memiliki beberapa sifat, diantaranya:

1. Tidak Komutatif

(g o f)(x) ≠ (f o g)(x)

1. Asosiatif

(f o (g o h))(x) = ((f o g) o h)(x)]

1. Fungsi Identitas I(x) = x

(f o I)(x) = (I o f)(x) = f(x)

* + - 1. **Cara Menentukan Fungsi Bila Fungsi Komposisi Dan Fungsi Yang Lain Diketahui**

Misalkan jika fungsi f dan fungsi komposisi (f o g) atau (g o f) telah diketahui maka kita dapat menentukan fungsi g. demikian juga sebaliknya.

Contoh Soal :

Misal fungsi komposisi (f o g) (x) = -4x + 4 dan f (x) = 2x + 2.

Tentukan fungsi g (x).

Jawab :

(f o g) (x) = -4x + 4

f (g (x)) = -4x + 4

2 (g (x)) + 2 = -4x + 4

2 g (x) = -4x + 2

g (x) = (-4x + 2)/2

g (x) = -2x + 1

Jadi fungsi g (x) = -2x + 1

Tugas:

1. Misal fungsi komposisi (f o g) (x) = -4x + 3 dan f (x) = 2x + 3

Tentukan g (x)

1. Misal fungsi komposisi (f o g) (x) = 2x + 3 dan g (x) = 4x + 3

Tentukan f (x)

1. **Fungsi Invers**

Apabila fungsi dari himpunan A ke B dinyatakan dengan f, maka invers dari fungsi f merupakan sebuah relasi dari himpunan A ke B. Sehingga, fungsi invers dari f : A -> B adalah f-1: B -> A. dapat disimpulkan bahwa daerah hasil dari f-1 (x)merupakan daerah asal bagi f(x) begitupun sebaliknya.

Cara menenukan fungsi invers bila fungsi f(x) telah diketahui :

* + - * 1. Ubah persamaan y = f (x) menjadi bentuk x sebagai fungsi dari y
        2. Hasil perubahan bentuk x sebagai fungsi yitu dinamakan sebagai f-1(y)
        3. Ubah y menjadi x [f-1(y) menjadi f-1(x)]

**Contoh Soal :**

Tentukanlah fungsi invers dari *f (x)* =

Jawab :

*y*  =

2xy + y = 4x – 3

y + 3 = 4x – 2xy

y + 3 = x(4 – 2y)

*x*  =

*f-1(x)*  =

**Soal Latihan :**

1. Diketahui fungsi f(x) = 3x−1 dan g(x) = 2x2−3. Fungsi komposisi  (g∘f)(x)=⋯⋅
2. Jika (f o g)(x) = x² + 3x + 4 dan g(x) = 4x – 5. Berapakah nilai dari f(3)?
3. Tentukanlah fungsi invers dari *f (x)* =

**BAB VI**

**PERSAMAAN LINGKARAN**

1. **Persamaan Lingkaran**
2. **Pengertian Lingkaran**

Lingkaran atau bisa disebut sebagai segi-tak hingga dalam bidang geometri. Dalam bidang kartesius, lingkaran adalah titik-titik yang berjumlah tak hingga yang memiliki jarak yang sama dengan pusat lingkaran. Jarak dari setiap titik ke titik pusat biasa disebut sebagai jari-jari r.

1. **Persamaan Lingkaran**

Terdapat beberapa macam persamaan lingkaran, yaitu persamaan yang dibentuk dari titik pusat dan jari-jari serta suatu persamaan yang bisa dicari titik pusat dan jari-jarinya.

1. **Persamaan umum lingkaran**

Dalam lingkaran, terdapat persamaan umum, yaitu:

***x2 + y2 +*A*x +* B*x +* C *=* 0**

Dari persamaan diatas, dapat ditentukan titik pusat serta jari-jari lingkarannya, yaitu:

Titik pusat lingkaran

**P (a,b) = P (- A, - B)**

Dan untuk jari-jari lingkaran adalah

**r = =**

1. **Persamaan lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r**

Dari suatu lingkaran jika diketahui titik pusat dan jari-jarinya, dapat diperoleh persamaan lingkarannya, yaitu dengan rumus:

(x - a)2 + (y - b)2 = r2

jika diketahui titik pusat dan jari-jari lingkaran dimana (a,b) adalah titik pusat dan r adalah jari-jari dari lingkaran tersebut. Dari persamaan yang diperoleh, kita dapat menentukan apakah suatu titik terletak pada lingkaran, di dalam lingkaran atau diluar lingkaran. Untuk menentukan letak titik tersebut, yaitu dengan subtitusi titik pada variabel x dan y kemudian dibandingkan hasilnya dengan kuadrat dari jari-jari.

1. **Persamaan lingkaran dengan dengan pusat O(0,0) dan jari-jari r**

Persamaan lingkaran jika titik pusat di O(0,0), maka subtitusi pada bagian sebelumnya, yaitu:

**(x - 0)2 + (y - 0)2 = r2 → *x2 + y2 = r2***

**Contoh soal :**

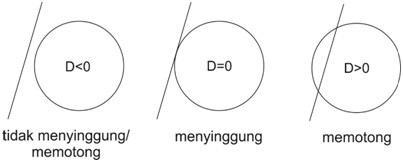
Persamaan suatu lingkaran adalah x2 + y2 − 8x + 4y − 5 = 0  
Tentukan: a) titik pusat lingkaran dan b) jari-jari lingkaran  
**Pembahasan**  
Suatu lingkaran x2 + y2 + Ax + By + C = 0 akan memiliki titik pusat **P (- A, - B)** dan jari-jari r =

Dari persamaan lingkaran diatas nilai : A = −8, B = 4 dan C = − 5  
a) titik pusat **(- (-8), - .4)** = (4, −2)  
b) jari-jari lingkaran r = = = 5

1. **Perpotongan Garis dan Lingkaran**

Suatu lingkaran dengan persamaan lingkaran ***x2 + y2 +*A*x +* B*x +* C *=* 0**  dapat ditentukan apakah suatu garis h dengan persamaan y = mx + n  tersebut tidak menyentuh, menyinggung, atau memotong lingkaran dengan menggunakan prinsip diskriminan.

1. Garis h tidak memotong/menyinggung lingkaran, maka D < 0
2. Garis h menyinggung lingkaran, maka D = 0
3. Garis h memotong lingkaran, maka D > 0



1. **Persamaan garis singgung melalui sebuah titik pada lingkaran**

Garis singgung pada suatu lingkaran tepat bertemu dengan satu titik yang terletak pada lingkaran. Dari titik pertemuan dari garis singgung dan lingkaran, dapat ditentukan persamaan garis dari garis singgung tersebut. Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik P*( x1, y1 )*, dapat ditentukan berdasarkan rumus persamaan lingkaran yang dijelaskan pada bagian sebelumnya, yaitu

1. **Bentuk *x2 + y2 = r2***

Persamaan garis singgungnya : *xx1 + yy1 = r1*

1. **Bentuk (x – a)2 + (y – b)2 = r2**

Persamaan garis singgungnya : (x – a) (x1 – a)+ (y – b) (y1 – b) = r2

1. **Bentuk *x2 + y2 + Ax + By + C = 0***

Persamaan garis singgungnya : *xx1 + yy1 + x+x1) + y+y1) + C = 0*

**Contoh Soal :**

Persamaan garis singgung yang melalui titik (-1,1) pada lingkaran *x2 + y2 - 4x + 6y - 12 = 0*  adalah …

Jawab :

Dari soal diatas diketahui persamaan lingkaran nya adalah  dengan *x2 + y2 - 4x + 6y - 12 = 0, dengan*

A = -4, B = 6 dan C = -12 dan *x1 = -1, y1 = 1*

*x x1 + y y1 + x + x1 ) + y + y1 ) + C = 0*

*x(-1) + y(1)- x-1) + y+1) -12 = 0*

*(-x) + y – 2x +2 +3y + 3 – 12 = 0*

*-3x + 4y – 7 = 0*

Jadi persamaan garis singgungnya adalah *-3x + 4y – 7 = 0*

1. **Persamaan garis singgung dengan gradien**
2. Jika suatu garis dengan gradien m yang menyinggung sebuah lingkaran *x2 + y2 = r2*, maka persamaan garis singgungnya dengan mensubtitusi *y = mx + c*, sehingga diperoleh ***(m2 + 1) x2 + 2cmx +c2 – r2 = 0***
3. Jika lingkaran (x-a)^2+(y-b)^2=r^2, maka persamaan garis singgungnya : **(y – b) = m (x – a) ± r**
4. Jika lingkaran *x2 + y2 + Ax + By + C = 0*  , maka persamaan garis singgungnya dengan mensubtitusi r, dengan r = = , sehingga diperoleh :

**(y – b) = m (x – a) ± atau (y – b) = m (x – a) ±**

1. **Persamaan garis singgung dengan titik yang berada di luar lingkaran**

Dari suatu titik yang berada diluar lingkaran, dapat ditarik dua garis singgung pada lingkaran tersebut.

Untuk mecari persamaan garis singgung, digunakan rumus persamaan garis biasa, yaitu : y – y1 = m(x – x1)

Akan tetapi dari rumus diatas, nilai gradien garis belum diketahui. Untuk mencari nilai gradien garis, subtitusikan persamaan pada persamaan lingkaran. Karena garis merupakan garis singgung, maka dari persamaan hasil [subtitusi](https://www.studiobelajar.com/integral-substitusi-parsial/) nilai D=0, dan akan diperoleh nilai m.

**Soal Latihan**

1. Tentukan titik pusat lingkaran dan jari-jari lingkaran dari persamaan lingkaran x2 + y2 + 4x - 6y − 12 = 0
2. Diberikan persamaan lingkaran sebagai berikut : x2 + y2 - 2x + 4y + 1 = 0. Jika pusat lingkaran adalah P(a,b), tentukanlah nilai 10a – 5b !
3. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat P (3,1) dan menyinggung garis 3x + 4y + 7 = 0
4. Persamaan garis singgung yang melalui titik (4,-1) pada lingkaran *x2 + y2 - 2x + 10y - 1 = 0*  adalah …